Tracé d’une courbe de Bézier par l’algorithme de Casteljau

Gérard GRANCHER

Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem

CNRS - Université de Rouen

Propriétés

Théorème 1 *Soit* $(P_i)_{0\leq i\leq n}$ *la suite des* $n+1$ *points de définition de* $(\mathcal{C})$, *une courbe de Bézier.*
Soit, pour tout t, *la suite (doublement indicée pour* $0 \leq k \leq n$ *et* $0 \leq j \leq n-k$*) des points* $P_j^{(k)}(t)$ *définis par* $P_j^{(0)}(t) = P_j$ *et*

$$\overrightarrow{OP_j^{(k)}}(t) = (1-t)\overrightarrow{OP_j^{(k-1)}}(t) + t\overrightarrow{OP_{j+1}^{(k-1)}}(t)$$

Alors on a pour tout t *tel que* $t \in [0,1]$ $P_0^{(n)}(t) = M(t)$ *où* $M(t)$ *est le point courant de* $(\mathcal{C})$.

L'algorithme de Casteljau est fondé sur le théorème ci-dessus.

Démonstration du théorème

On a

Démonstration du théorème

On a

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_n^i(t)\overrightarrow{OP_i}$$

Démonstration du théorème

On a

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_n^i(t)\overrightarrow{OP_i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1}^i(t)\overrightarrow{OP_i^{(1)}}$$

Démonstration du théorème

On a

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_n^i(t)\overrightarrow{OP_i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}(1-t)^{n-1-i}t^i \left((1-t)\overrightarrow{OP_i^{(0)}} + t\overrightarrow{OP_{i+1}^{(0)}}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1}^i(t)\overrightarrow{OP_i^{(1)}}$$

Démonstration du théorème

On a

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_n^i(t)\overrightarrow{OP_i}$$

$$= (1-t)^n\overrightarrow{OP_0^{(0)}} + \left[\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i\overrightarrow{OP_i^{(0)}}\right] + t^n\overrightarrow{OP_n^{(0)}}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(1-t)^{n-1-i}t^i\left((1-t)\overrightarrow{OP_i^{(0)}} + t\overrightarrow{OP_{i+1}^{(0)}}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1}^i(t)\overrightarrow{OP_i^{(1)}}$$

Démonstration du théorème

On a

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OM}(t) &= \sum_{i=0}^{n} B_n^i(t)\overrightarrow{OP_i} \\
&= (1-t)^n\overrightarrow{OP_0^{(0)}} + \left[\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i\overrightarrow{OP_i^{(0)}}\right] + t^n\overrightarrow{OP_n^{(0)}} \\
&= (1-t)^n\overrightarrow{OP_0^{(0)}} + \sum_{i=1}^{n-1}\left[\binom{n-1}{i}+\binom{n-1}{i-1}\right](1-t)^{n-i}t^i\overrightarrow{OP_i^{(0)}} + t^n\overrightarrow{OP_n^{(0)}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(1-t)^{n-1-i}t^i\left((1-t)\overrightarrow{OP_i^{(0)}} + t\overrightarrow{OP_{i+1}^{(0)}}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1}^i(t)\overrightarrow{OP_i^{(1)}}
\end{aligned}
$$

Démonstration du théorème

On a

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_n^i(t)\overrightarrow{OP_i}$$

$$= (1-t)^n\overrightarrow{OP_0^{(0)}} + \left[\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i\overrightarrow{OP_i^{(0)}}\right] + t^n\overrightarrow{OP_n^{(0)}}$$

$$= (1-t)^n\overrightarrow{OP_0^{(0)}} + \sum_{i=1}^{n-1}\left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right](1-t)^{n-i}t^i\overrightarrow{OP_i^{(0)}} + t^n\overrightarrow{OP_n^{(0)}}$$

$$= (1-t)^{n-1}(1-t)\overrightarrow{OP_0^{(0)}} + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}(1-t)^{n-1-i}t^i(1-t)\overrightarrow{OP_i^{(0)}}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i-1}(1-t)^{n-i}t^{i-1}t\overrightarrow{OP_i^{(0)}} + t^{n-1}t\overrightarrow{OP_n^{(0)}}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(1-t)^{n-1-i}t^i\left((1-t)\overrightarrow{OP_i^{(0)}} + t\overrightarrow{OP_{i+1}^{(0)}}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}B_{n-1}^i(t)\overrightarrow{OP_i^{(1)}}$$

Démonstration du théorème

On a

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OM}(t) &= \sum_{i=0}^{n} B_n^i(t)\overrightarrow{OP_i} \\
&= (1-t)^n\overrightarrow{OP_0^{(0)}} + \left[\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i\overrightarrow{OP_i^{(0)}}\right] + t^n\overrightarrow{OP_n^{(0)}} \\
&= (1-t)^n\overrightarrow{OP_0^{(0)}} + \sum_{i=1}^{n-1}\left[\binom{n-1}{i}+\binom{n-1}{i-1}\right](1-t)^{n-i}t^i\overrightarrow{OP_i^{(0)}} + t^n\overrightarrow{OP_n^{(0)}} \\
&= (1-t)^{n-1}(1-t)\overrightarrow{OP_0^{(0)}} + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}(1-t)^{n-1-i}t^i(1-t)\overrightarrow{OP_i^{(0)}} \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i-1}(1-t)^{n-i}t^{i-1}t\overrightarrow{OP_i^{(0)}} + t^{n-1}t\overrightarrow{OP_n^{(0)}} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(1-t)^{n-1-i}t^i(1-t)\overrightarrow{OP_i^{(0)}} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}(1-t)^{n-1-(i-1)}t^{i-1}t\overrightarrow{OP_i^{(0)}} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(1-t)^{n-1-i}t^i\left((1-t)\overrightarrow{OP_i^{(0)}} + t\overrightarrow{OP_{i+1}^{(0)}}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1}^i(t)\overrightarrow{OP_i^{(1)}}
\end{aligned}
$$

Démonstration du théorème

On a

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_n^i(t)\overrightarrow{OP_i}$$

$$= (1-t)^n\overrightarrow{OP_0^{(0)}} + \left[\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i\overrightarrow{OP_i^{(0)}}\right] + t^n\overrightarrow{OP_n^{(0)}}$$

$$= (1-t)^n\overrightarrow{OP_0^{(0)}} + \sum_{i=1}^{n-1}\left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right](1-t)^{n-i}t^i\overrightarrow{OP_i^{(0)}} + t^n\overrightarrow{OP_n^{(0)}}$$

$$= (1-t)^{n-1}(1-t)\overrightarrow{OP_0^{(0)}} + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}(1-t)^{n-1-i}t^i(1-t)\overrightarrow{OP_i^{(0)}}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i-1}(1-t)^{n-i}t^{i-1}t\overrightarrow{OP_i^{(0)}} + t^{n-1}t\overrightarrow{OP_n^{(0)}}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(1-t)^{n-1-i}t^i(1-t)\overrightarrow{OP_i^{(0)}} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}(1-t)^{n-1-(i-1)}t^{i-1}t\overrightarrow{OP_i^{(0)}}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(1-t)^{n-1-i}t^i\left((1-t)\overrightarrow{OP_i^{(0)}} + t\overrightarrow{OP_{i+1}^{(0)}}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1}^i(t)\overrightarrow{OP_i^{(1)}}$$

Ainsi, après n itérations, on obtient : $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OP_0^{(n)}}(t)$.